2Ш

УДК 517.524

В.И. Шмойлов, В.Б. Коваленко
Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. акад. А.В. Каляева ЮФУ, г. Таганрог, Россия

Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. При вычислении отношений определителей Теплица используется модифицированный алгоритм Рутисхаузера. Для нахождения комплексных корней применяется метод суммирования непрерывных дробей.

Введение

Известный американский специалист Р. Хемминг в монографии «Численные методы» [1] отмечал: «Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным известным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного». В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые применяются для нахождения нулей полиномов [2].

В [3] был описан r/φ-алгоритм, который оказался эффективным при определении значений расходящихся непрерывных дробей и рядов [4], а также при решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [5]. **Цель работы** – построение алгоритма решения алгебраических уравнений n-й степени, базирующегося на способе суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Постановка задачи

Пусть имеется полином степени n:

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n . \qquad (1)$$

Запишем следующую производящую функцию

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + \ldots . \qquad (2)$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -\left(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \ldots + \alpha_n c_{m-n}\right), \quad c_0 = 1 ,\ c_1 = -\alpha_1 .$$

Для определения корней алгебраического уравнения

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0 \qquad (3)$$

Эйткен [6] предложил формулы:

$$x_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \qquad (4)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \qquad (5)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \qquad (6)$$

$$\ldots$$

$$x_n = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+n} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \ldots & c_{m+n+1} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{m+n} & c_{m+n+1} & \ldots & c_{m+2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \ldots & c_{m+n-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+n} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \ldots & c_{m+2n-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+n-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \ldots & c_{m+n} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{m+n-1} & c_{m+n} & \ldots & c_{m+2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \ldots & c_{m+n-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{m+n-1} \\ . & . & \ldots & . \\ c_{m+n-2} & c_{m+n-1} & \ldots & c_{m+2n-4} \end{vmatrix}} \right). \qquad (7)$$

Здесь $|x_1| \ge |x_2| \ge |x_3| \ge \ldots \ge |x_n|$.

Используя формулы Эйткена, можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (3). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (3), описываемый формулой (4), как известно, принадлежит Д. Бернулли.

Применим предложенный в [3] r/φ-алгоритм суммирования расходящихся непрерывных дробей к определению комплексных корней алгебраического уравнения (3).

Решение алгебраических уравнений при помощи r/φ-алгоритма

Запишем формулы Эйткена (4) – (7) в развернутом виде. В результате несложных преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (3).

Формулу (4) можно представить отношением определителей:

$$x_1=-\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}. \qquad (8)$$

Последующие корни уравнения (3) запишутся следующим образом:

$$x_2=-\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}, \qquad (9)$$

$$x_3=-\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \dots\\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots\\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots\\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots\\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots\\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}, \qquad (10)$$

…………………………………………………………………....

$$x_i=-\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots\\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots\\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots\\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots\\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots\\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}-\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots\\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots\\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots\\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots\\ . & . & . & . & \dots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots\\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots\\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots\\ . & . & . & \dots\end{vmatrix}}; \qquad (11)$$

Отношения определителей (8) – (11), выражающие корни алгебраического уравнения (3) через его коэффициенты, будем называть функциями $X_i^{(n)}$. Для функций $X_i^{(n)}$ введём обозначение

$$X_i^{(n)} = X_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Известно, что попытки найти решения алгебраических уравнений степеней выше четвёртой в радикалах стимулировалось тем обстоятельством, что для уравнений 2, 3 и 4 степени решения в радикалах были найдены. Метод аналогии при решении уравнений в радикалах не сработал. И здесь уместно подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвёртой функции $X_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4. Например, для уравнения пятой степени функции $X_i^{(5)}$ имеют вид:

$$X_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \quad (12)$$

$$X_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & 0 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \ldots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \ldots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}, \quad (13)$$

Аналогично записываются функции $X_3^{(5)}$, $X_4^{(5)}$ и $X_5^{(5)}$.

Несложно по формулам (8) – (11) записать аналитические выражения для представления корней алгебраических уравнений шестой, седьмой и, вообще, произвольной степени *n* через коэффициенты исходного уравнения [7].

Очевидно, для комплексных корней уравнения (3), определяемых также формулами (8) – (11), непосредственное их вычисление значений невозможно. В этом случае необходимо дополнительно использовать *r*/*φ*-алгоритм. Модуль и аргумент искомого комплексного числа определяются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\prod_{m=1}^{p} \left| X_{im}^{(n)} \right|}, \quad (14)$$

$$\left|\varphi_i\right| = \pi \lim_{p\to\infty} \frac{k_p}{p}, \tag{15}$$

где $X_{im}^{(n)}$ – m-я подходящая дробь выражений (8) – (11), k_p – число отрицательных подходящих дробей из p подходящих дробей $X_{ip}^{(n)}$.

Например, подходящие дроби $X_{2m}^{(n)}$ определяются следующим образом:

$$X_{21}^{(n)} = \frac{\left|-\alpha_2\right|}{1} : \frac{\left|-\alpha_1\right|}{1}, \quad X_{22}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\left|-\alpha_2\right|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\left|-\alpha_1\right|}, \quad X_{23}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_4 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \quad \ldots \; .$$

В табл. 1 – 5 приведены результаты вычисления корней уравнения

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{16}$$

при помощи функций $X_i^{(n)}$.

Предел отношения определителей, входящих в формулу (17), совпадает, очевидно, со значением старшего по модулю корня уравнения (16):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}} = 1{,}965948236645485\ldots \; . \tag{17}$$

Таблица 1 – Нахождение нулей полинома x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_1=1,965948236645… 1

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Погрешность модуля, r_0–r_i
15	1,965942454492	0,000005782153
16	1,965949820789	-0,000001584143
17	1,965948799757	-0,000000563111
18	1,965948280026	-0,000000043380
19	1,965948121250	0,000000115395
20	1,965948172439	0,000000064207
21	1,965948271478	-0,000000034833
22	1,965948244643	-0,000000007997
23	1,965948235028	0,000000001618
24	1,965948234248	0,000000002397
25	1,965948236206	0,000000000440
26	1,965948237310	-0,000000000665
27	1,965948236718	-0,000000000073
28	1,965948236581	0,000000000064
29	1,965948236608	0,000000000037
30	1,965948236649	-0,000000000003

Данные табл. 1 показывают высокую скорость сходимости непрерывной дроби Хессенберга(17), которой представляется единственный вещественный корень уравнения (16).

При вычислении определителей (17) можно использовать рекуррентное соотношение

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + P_{m-3} + P_{n-4} + P_{n-5}$$

с начальными условиями $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 8$.

В табл. 2 и 3 приведены результаты вычислений первой пары комплексных корней уравнения (16), с использованием r/φ-алгоритма, описываемых формулами (14) и (15).

Таблица 2 – Нахождение нулей полинома x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_2=0,871047941737…$e^{i1,344571014601…}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$
15	-5,340949820789	5,340949820789	-4,469901879051	3,141592653590	-1,797021638988
16	-0,272496418805	1,206395332874	-0,335347391137	3,141592653590	-1,797021638988
17	1,000718386641	1,133523144447	-0,262475202709	2,094395102393	-0,749824087791
18	0,600589118425	0,967090592961	-0,096042651224	1,570796326795	-0,226225312193
19	-0,633810653754	0,888721392189	-0,017673450452	1,884955592154	-0,540384577552
20	3,803725432936	1,132416586390	-0,261368644653	1,570796326795	-0,226225312193
21	-0,532683357579	1,016752405306	-0,145704463569	1,795195802051	-0,450624787450
22	0,704394902227	0,971158985921	-0,100111044183	1,570796326795	-0,226225312193
23	0,159361500265	0,794471738118	0,076576203619	1,396263401595	-0,051692386994
111	1,337912542695	0,881481533587	-0,010433591850	1,360277231451	-0,015706216850
112	-0,172523993990	0,866931967200	0,004115974537	1,378453919432	-0,033882904831
113	4,799388558207	0,882047751357	-0,010999809620	1,364530142468	-0,019959127867
114	0,232691795613	0,870372151545	0,000675790193	1,350884841044	-0,006313826442

Таблица 3 – Нахождение нулей полинома x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0

x_3=0,871047941737…$e^{-i1,344571014601…}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0–r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0–\varphi_i$
15	-0,380952380952	0,380952380952	0,490095560785	-3,141592653590	1,797021638988
16	-1,341666666667	0,714920352984	0,156127588753	-3,141592653590	1,797021638988
17	0,085636673368	0,352418233711	0,518629708027	-2,094395102393	0,749824087791
18	3,087217320025	0,606297221771	0,264750719966	-1,570796326795	0,226225312193
19	-2,159054235388	0,781629915587	0,089418026150	-1,884955592154	0,540384577552
20	0,619366691884	0,751898038419	0,119149903318	-1,570796326795	0,226225312193
21	-1,085115864528	0,792352707512	0,078695234225	-1,795195802051	0,450624787450
22	0,234690265487	0,680558734958	0,190489206779	-1,570796326795	0,226225312193
23	6,586290624847	0,875782371205	-0,004734429468	-1,396263401595	0,051692386994
111	0,563208963175	0,859347029743	0,011700911994	-1,360277231451	0,015706216850
112	-4,404014338375	0,873796326011	-0,002748384274	-1,378453919432	0,033882904831
113	0,158463117875	0,858856282764	0,012191658973	-1,364530142468	0,019959127867
114	3,267672163701	0,870409608931	0,000638332806	-1,350884841044	0,006313826442

Аналогично найдем вторую пару комплексных корней уравнения (16). В табл. 4, 5 приведены результаты вычислений второй пары комплексных корней уравнения (16).

Таблица 4 – Нахождение нулей полинома X^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0
x_4=0,818788815767…$e^{-i2,547185551422…}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i
15	-0,625000000000	0,625000000000	0,193788815767	-3,141592653590	0,594407102167
16	-1,252173913043	0,884651736929	-0,065862921162	-3,141592653590	0,594407102167
17	-2,308243727599	1,217892000014	-0,399103184246	-3,141592653590	0,594407102167
18	-0,039190897598	0,515825592710	0,302963223057	-3,141592653590	0,594407102167
19	5,947368421052	0,841138045930	-0,022349230163	-2,513274122872	-0,033911428551
20	-0,647727272727	0,805294553097	0,013494262670	-2,617993877991	0,070808326569
21	-1,026666666667	0,833724522949	-0,014935707181	-2,692793703077	0,145608151654
22	-1,758241758242	0,915228588979	-0,096439773211	-2,748893571891	0,201708020468
23	-0,136300093197	0,740690841881	0,078097973886	-2,792526803191	0,245341251768
111	-0,793851566699	0,823821565262	-0,005032749494	-2,558616697254	0,011431145831
112	-0,506765649740	0,819746988619	-0,000958172851	-2,564565431502	0,017379880079
113	-0,036008708749	0,794273382670	0,024515433097	-2,570393989301	0,023208437878
114	17,220715630403	0,819088485466	-0,000299669699	-2,544690049408	-0,002495502015

Таблица 5 – Нахождение нулей полинома x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0
x_5=0,818788815767$e^{i2,547185551422}$

Номер дроби, i	Значения подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, r_0–r_i	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, φ_0–φ_i
15	-0,400000000000	0,400000000000	0,418788815767	3,141592653590	-0,594407102167
16	-1,111111111111	0,666666666667	0,152122149101	3,141592653590	-0,594407102167
17	-2,571428571429	1,045515917149	-0,226727101382	3,141592653590	-0,594407102167
18	-7,000000000000	1,681792830507	-0,863004014740	3,141592653590	-0,594407102167
19	0,062500000000	0,870550563296	-0,051761747529	2,513274122872	0,033911428551
20	-0,333333333333	0,741836375590	0,076952440177	2,617993877991	-0,070808326569
21	-0,857142857143	0,757306542125	0,061482273643	2,692793703077	-0,145608151654
22	-1,750000000000	0,840896415254	-0,022107599486	2,748893571891	-0,201708020468
23	-3,555555555556	0,986998258526	-0,168209442758	2,792526803191	-0,245341251768
111	-0,850337500394	0,815103906755	0,003684909013	2,558616697254	-0,011431145831
112	-1,321059942912	0,819130068155	-0,000341252387	2,564565431502	-0,017379880079
113	-18,574035217831	0,845367070142	-0,026578254375	2,570393989301	-0,023208437878
114	0,038846972367	0,819725499605	-0,000936683837	2,544690049408	0,002495502015

На рис. 1 приведены графики распределения значений функции $X_{im}^{(5)}$, которые представляют корни алгебраического уравнения (16).

Из графика 1а) видно, что x_1 – вещественный корень. Графики также показывают, что имеются две пары комплексно-сопряжённых корней. Знак аргумента определяется по динамике распределения подходящих. Из графиков рис. 1б) и 1в) можно заключить, что аргумент первой пары комплексных корней менее $\pi/2$. Из графиков рис. 1г) и 1д) видно, что аргумент второй пары лежит в интервале $\pi/2<\varphi<\pi$, причём, φ ближе к π, чем к $\pi/2$. Отчётливо просматривается регулярность графиков, представляющих две пары комплексно-сопряжённых корней.

Вышеприведенные значения подходящих функций $X_{im}^{(n)}$, задаваемые отношениями определителей Теплица n-го и (n-1)-го порядков, находились при помощи стандартных программ для вычисления определителей общего вида. Такой подход показывает возможность решения задачи «в принципе», но не позволяет установить значения большого количества значений функции $X_{im}^{(n)}$, или отсчетов, что ограничивает точность при нахождении комплексных корней полиномов. Между тем, для определения значения функции $X_{im}^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Теп-

лица, то есть определителей не общего, а весьма специального вида, может быть эффективно использован после незначительной модификации, известный рекуррентный алгоритм частных и разностей, или QD-алгоритм Рутисхаузера [8].

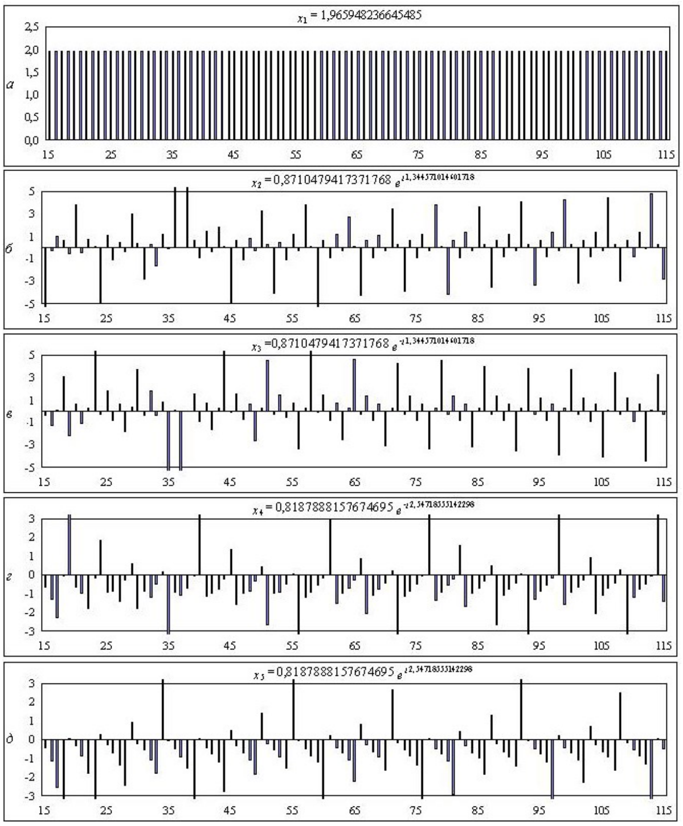


Рисунок 1 – Распределение значений функции $X_{im}^{(5)}$,
представляющих корни уравнения (16)

QD-алгоритм, определяемый формулами (18) и (19), удобно представлять следующей схемой (рис. 2):

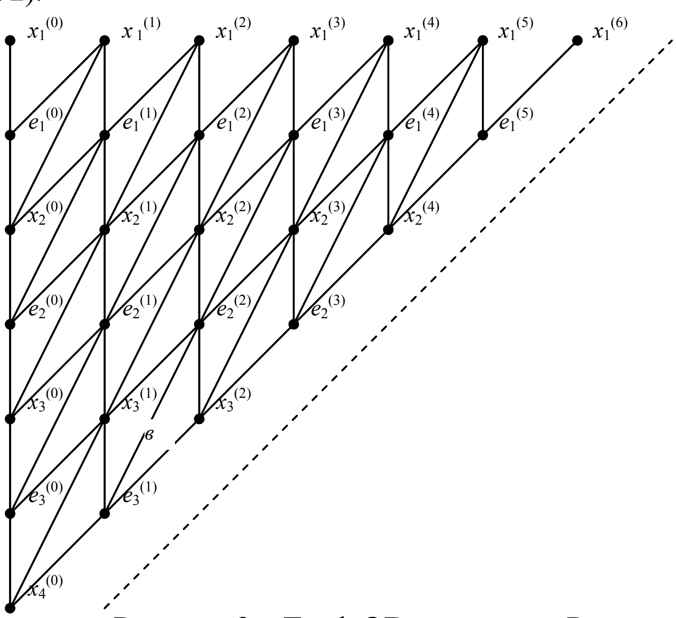


Рисунок 2 – Граф QD-алгоритма Рутисхаузера

Так называемая упрощённая форма *QD*-алгоритма описывается формулами:

$$e_n^{(m)} = e_{n-1}^{(m+1)} + x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}, \quad (18)$$

$$x_{n+1}^{(m)} = x_n^{(m+1)} \cdot \frac{e_n^{(m+1)}}{e_n^{(m)}}. \quad (19)$$

Полагаем, что $e_0^m = 0$. Элементы первой строки $x_1^{(m)}$ составляют последовательные подходящие дроби Хессенберга (8). Значение непрерывной дроби Хессенберга (8) удобно вычислять при помощи нелинейной рекуррентной формулы

$$x_1^{(m)} = (-\alpha_1) + \frac{(-\alpha_2)}{x_1^{(m-1)}} + \frac{(-\alpha_3)}{x_1^{(m-2)} x_1^{(m-1)}} + \ldots + \frac{(-\alpha_n)}{x_1^{(m-n+1)} x_1^{(m-n)} \ldots x_1^{(m-1)}}.$$

В табл. 6 и 7 приведены результаты вычисления комплексных корней уравнения

$$x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8+16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0 \quad (20)$$

с использованием алгоритма Рутисхаузера и r/φ-алгоритма. Уравнение (20) имеет корни: $x_1 = 2,\ \ x_2 = 2e^i,\ \ x_3 = 2e^{-i},\ \ x_4 = 2$.

Таблица 6 – Нахождение нулей полинома $x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8+16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0$

$x_2 = 2e^i$

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	3,843317264310	1,929075885880	0,070924114122	0,951997773815	0,048002226185
64	2,005784174240	1,959056634960	0,040943365045	0,966643893412	0,033356106588
128	-0,129973382076	1,936094593410	0,063905406585	0,998490688350	0,001509311650
256	1,376378788680	1,987249193310	0,012750806689	0,990151770198	0,009848229802
512	-6,402078713170	1,993746888830	0,006253111170	0,998205852895	0,001794147105
131072	1,248565967790	1,999973613170	0,000026386826	0,999980065310	0,000019934690
262144	-28,213818211700	1,999988822720	0,000011177283	0,999995864096	0,000004135904
524288	63,797892489700	1,999994624810	0,000005375191	0,999997771433	0,000002228567
1048576	9,590801968450	1,999997471920	0,000002528083	0,999998725105	0,000001274895
2097152	3,939400713830	1,999998804140	0,000001195860	0,999999201941	0,000000798059

Таблица 7 – Нахождение нулей полинома $x^4 - 4(1+\cos 1)x^3 + (8+16\cos 1)x^2 - 16(1+\cos 1)x + 16 = 0$

$x_3 = 2e^{-i}$

Номер дроби, i	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	0,993534847417	1,974703683030	0,025296316974	-0,951997773815	-0,048002226185
64	1,937971654080	1,990412258620	0,009587741380	-0,966643893412	-0,033356106588
128	-30,582211191500	2,039391626800	-0,039391626805	-0,998490688350	-0,001509311650
256	2,926554556880	1,999874774880	0,000125225118	-0,990151770198	-0,009848229802
512	-0,625436948679	1,999744289590	0,000255710409	-0,998205852895	-0,001794147105
131072	3,203718500850	2,000000857400	-0,000000857402	-0,999980065310	-0,000019934690
262144	-0,141774945268	1,999998412280	0,000001587717	-0,999995864096	-0,000004135904
524288	0,062697880567	1,999998992680	0,000001007319	-0,999997771433	-0,000002228567
1048576	0,417065781062	1,999999336820	0,000000663184	-0,999998725105	-0,000001274895
2097152	1,015382072280	1,999999600220	0,000000399776	-0,999999201941	-0,000000798059

На рис. 4 показано распределение значений функции $X_{im}^{(4)}$, определяющих корни уравнения (20).

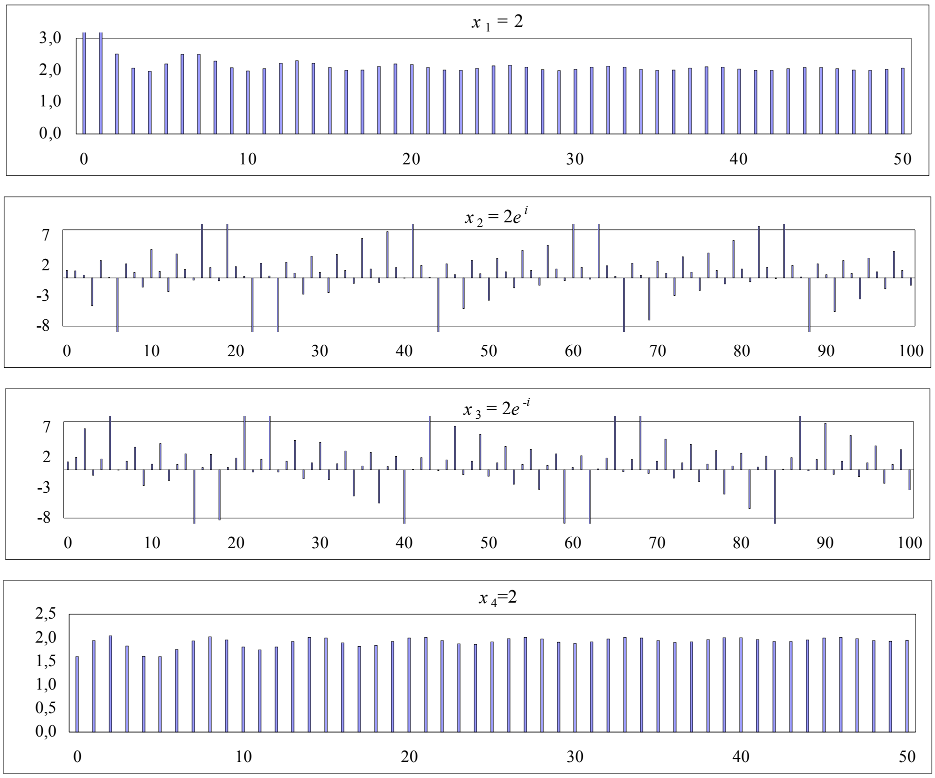


Рисунок 4 – Распределение значений функции $X_{im}^{(4)}$, определяющих корни уравнения (20)

Заключение

Следует отметить простоту и регулярность QD-алгоритма: на вычисление каждой вершины графа этого алгоритма требуется выполнение всего двух арифметических операций. Также чрезвычайно прост для программирования и r/φ-алгоритм, который используется при нахождении комплексных корней алгебраического уравнения. Все это делает предложенный в статье алгоритм нахождения всех корней алгебраического уравнения степени n весьма привлекательным для широкого его использования.

Особо хотелось бы обратить внимание на то, что формула (11) есть аналитическое выражение, представляющее корни полинома n-й степени через его коэффициенты. Используя формулу (11), можно установить различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Численные методы, разумеется, не способны к решению подобных задач. То обстоятельство, что в формулу (11) входят определители бесконечного порядка, не должно вызывать дополнительных вопросов, ибо нахождение того же корня квадратного уравнения по известным формулам также связано с бесконечной вычислительной процедурой. Формулу (11), включающую отношения определителей Теплица бесконечного порядка, можно рассматривать как мнемоническую запись алгоритма нахождения корней произвольного алгебраического уравнения n-го порядка, которая разворачивается в последовательность арифметических операций. Точно также мнемоническими записями являются формулы для решения квадратных уравнений, формулы Кардана и Феррари для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней. Формула (11) была названа функцией $X_i^{(n)}$. Произвольное алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$ не разрешимо, как известно, в радикалах, но

оно оказалось разрешимо в функциях $X_i^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Теплица бесконечного порядка. Как уже отмечалось, при вычислении комплексных корней алгебраических уравнений по формуле (11) используется r/φ-алгоритм, описываемый формулами (14) и (15).

Литература

1. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Хемминг Р.В. – М. : Наука, 1972. – 400 с.
2. Шмойлов В.И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель / В.И. Шмойлов, Р.И. Тучапский. – Львов : Меркатор, 2003. – 83 с.
3. Aitken A. On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations / A. Aitken // Proc. Roy. Soc., Edinburgh, Ser. A, 46 (1925/26). – P. 289-305.
4. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей / Рутисхаузер Г. – М. : ИИЛ, 1960. – 93 с.
5. Шмойлов В.И. Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями / Шмойлов В.И. – Львов : Меркатор, 2003. – 599 с.
6. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби : [в 3 т.] / Шмойлов В.И. – Львов : Меркатор, 2004. – Т. 1. Периодические непрерывные дроби. – 645 с.

В.І. Шмойлов, В.Б. Коваленко
Розв'язування алгебраїчних рівнянь безперервними дробами
Наводяться аналітичні вирази, які представляють всі корені довільного алгебраїчного рівняння n-го степеня через коефіцієнти початкового рівняння. Ці формули складаються з двох відношень нескінченних визначників Теплиця, діагональними елементами яких є коефіцієнти алгебраїчного рівняння. При обчислюванні відношень визначників Теплиця використовується модифікований алгоритм Рутісхаузера. Для визначення комплексних коренів застосовується метод додавання неперервних дробів.

V.I. Shmoylov, V.B. Kovalenko
Solution of Algebraic Equations by Continued Fractions
There are given analytic expressions introducing all roots of arbitrary algebraic n-th equation using coefficients of initial equation. These formulas consist of two proportions of Toeplitz infinite determinants with algebraic equation coefficients as diagonal elements. To calculate Toeplitz determination ratio Rutishauser's modified algorithm is used. For complex roots determination method of divergent continued fractions summability is used.

Статья поступила в редакцию 04.11.2010.